Leçons :
106 : Groupe linéaire ss-gpe de $GL(E)$
152 : Endom. diag
157 : Mat. symétriques
(203 : utilisat° de la notion de compacité) → le montrer

Dev : Décomposition polaire [NH2G2]

$$\mathcal{N} : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}), \quad (O, S) \mapsto O.S$$

est un homéomorphisme

ÉTAPES :

i) $\mathcal{N}$ bien déf ✓ (et continue ✓)

ii) $\mathcal{N}$ est surjective : •) $Orb_{I_n} = \{ {}^tM I_n M \mid M \in GL_n(\mathbb{R}) \} \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

⇒ Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

⊕ utilisation Thm spectral.

••) Poser S de sorte que $S^2 = {}^tMM$ et $O = MS^{-1}$

→ montrer que $O \in O_n(\mathbb{R})$.

iii) $\mathcal{N}$ est injective : •) Pour $M = OS = O'S'$ montrer que $S^2 \in S'^2$

••) Utilisation du polyn. interpolateur de Lagrange

$\forall i, Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$

→ montrer que $S = Q(S^2) \in Q(S'^2)$

→ en déduire que S et S' commutent

→ utiliser le thm. de co-diagonalisation pour en déduire $S = S'$.

iv) $\mathcal{N}^{-1}$ est continue •) On pose $(M_p)_p \subset GL_n(\mathbb{R})$ tq $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} M$

et on note $\forall p, (O_p, S_p) = \mathcal{N}^{-1}(M_p)$

de sorte que $\begin{cases} \forall p, O_p S_p = M_p \\ \text{et} \\ (O, P) = \mathcal{N}^{-1}(M) \end{cases}$

••) Utilisation de **prop : $O_n(\mathbb{R})$ est compact**

⇒ toutes suites de $O_n(\mathbb{R})$ a une valeur d'adhérence dans $O_n(\mathbb{R})$

→ Pour $(O_{p_k})_k$ noter $\bar{O}$ sa val. d'adh°

mq. $S_{p_k} \to \underbrace{\bar{O}^{-1} M}_{(\in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Scanné avec CamScanner

Preuve :

ii) $\mathcal{N}$ est surjectif : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tMM = {}^tM I_n M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

donc il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ tel que : ${}^tMM = P_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP_0$ avec $\lambda_i > 0$

on peut alors poser : $S = P_0 \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $\sqrt{\lambda_i} > 0$

D'où $S^2 = {}^tMM$, et en posant $O = MS^{-1}$ on obtient :

$${}^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS = S^{-1}S^2S = I_n$$

Finalement $M = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

iii) $\mathcal{N}$ est injective :

- Soit $M = O'S' = OS$ où $O, O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

  Par les mêmes notations que précédemment, on a :

  $$S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'\,{}^tO'O'S' = S'^2$$

- Par les polynômes interpolateurs de Lagrange, on pose $Q \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $\forall i$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$

D'où :

$$S = P_0 \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP_0 = P_0 \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} {}^tP_0$$

Écrire : $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $\Rightarrow Q\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)$

$$= P_0\, Q\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) {}^tP_0$$

$$= Q\left(P_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP_0\right)$$

$$= Q(S^2) = Q(S'^2)$$

(vue plus haut)

- Or S' commute avec $Q(S'^2)$, donc S' commute avec S.

  S et S' sont donc codiagonalisables.

Donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq : $S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,{}^tP$

$S' = P\,\mathrm{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)\,{}^tP$

Scanné avec CamScanner

Comme $S^2 = S'^2$, on obtient :

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} {}^t P = P \begin{pmatrix} \lambda_1'^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n'^2 \end{pmatrix} {}^t P$$

$$\Rightarrow \forall i, \ \lambda_i^2 = \lambda_i'^2$$

$$\Rightarrow \forall i, \ \lambda_i = \lambda_i'$$

D'où $S = S'$.

Finalement, $O'S' = O'S = OS \Rightarrow O' = O$.

iv) μ^{-1} est continue :

Soit $(M_p)_p \subset GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} M$

on pose : $\forall p, \ (O_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p) \Rightarrow \begin{cases} O_p \times S_p = M_p \\ \text{et} \\ (O, S) = \mu^{-1}(M) \end{cases}$

- Lemme : $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Pour $(O_{p_k})_k$ une suite extraite, on a que $O_{p_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{O} \in O_n(\mathbb{R})$

D'où : $S_{p_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{S} = \bar{O}^{-1} M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$

$= GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^+(\mathbb{R})$

$= S_n^{++}(\mathbb{R})$

Donc $(S_p)_p$ connait une unique valeur d'adhérence.

D'où : $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} M = \bar{O}\bar{S}$

Par unicité de la décomposition polaire (c-à-d : l'injectivité de μ)

on a : $M = \underbrace{\bar{O}}_{O_n(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\bar{S}}_{\in S_n^{++}(\mathbb{R})} \Rightarrow \bar{O} = O$ et $\bar{S} = S$

Scanné avec CamScanner

Bonus : Application : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

Preuve : Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, par le Thm. de décomposition polaire, il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que :

$A = O \times S$, on a donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|A(x)\|_2 = \|OS(x)\|_2 = \|S(x)\|_2$.

D'où : $|||A|||_2 = |||S|||_2$.

Comme S est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée $\{v_1, \dots, v_n\}$ ordonnée de sorte que : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

Pour $x \in S_{\|\cdot\|_2}$, on pose $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ et on a :

$$\|S(x)\|_2 = \left\| \sum_i \lambda_i x_i v_i \right\| \leq \rho(S) = |\lambda_1|$$

et la borne est atteinte pour $x = v_1$.

D'où : $\rho(S) = |\lambda_1| = \sqrt{|\lambda_1|^2} = \sqrt{\rho(S^2)}$

$= \sqrt{\rho({}^tAA)}$

□

Scanné avec CamScanner